



TITLE:

## 4.輸送現象(粘性係数について)(短期研究会「超流動 $^3\text{He}$ の理論」報告)

AUTHOR(S):

小野, 義正

---

CITATION:

小野, 義正. 4.輸送現象(粘性係数について)(短期研究会「超流動 $^3\text{He}$ の理論」報告). 物性研究 1977, 28(2): B8-B14

ISSUE DATE:

1977-05-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/89352>

RIGHT:

参 考 文 献

- (1) V. Ambegaokar and N. D. Mermin Phys. Rev. Lett **30** 81 (1973)
- (2) W. F. Brinkman, J. W. Serene and P. W. Anderson Phys. Rev. **A10** 2386 (1974)
- (3) K. Levin Phys. Rev. Lett. **21** 1002 (1975)
- (4) K. Maki Phys. Lett **51A** 337 (1975)
- (5) R. B. Kummer, E. D. Adams, W. P. Kirk, A. S. Greenberg, R. M. Mueller, C. V. Britton and D. M. Lee Phys. Rev. Lett. **34** 517 (1975)
- (6) J. P. Carton Jour. de Phys. Lett. **36** L-213 (1975)

輸送現象（粘性係数について）

東大・理 小 野 義 正

輸送現象のうち理論的にも実験的にもよくわかって来た粘性係数につき解説をする。

$^3\text{He}$  の超流動は p-波のクーパ一対からできているので、秩序変数はベクトルになりまた非等方性があらわれる。

(1) 実 験

実験は 3 ケ所で行なわれた。  
(i) Helsinki Group<sup>1) 2)</sup> (ii) La Jolla Group<sup>3)</sup> (iii) Manchester Group<sup>4)</sup> である。簡単に方法と結果を説明する。Helsinki Group は融解曲線上で vibrating string viscometer を用いて  $\rho_n$  と  $\eta_n$  を

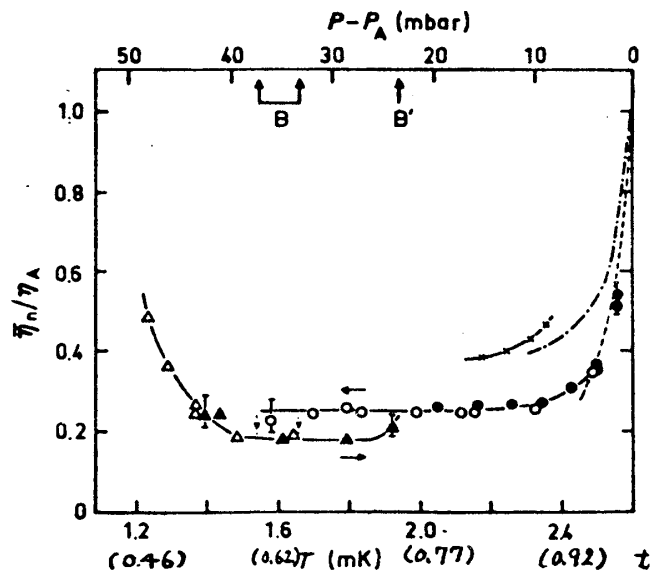


図 1

測定した。 $\eta_n$  の結果を図 1. に示す。 $T \lesssim T_c$  で  $\eta_n$  は急に下がり,  $0.5 \lesssim t = T/T_c \lesssim 0.9$  で constant になり低温で増加する傾向を示し, A  $\rightarrow$  B 転移点で飛びをもつ。  
 La Jolla Group は heat flow の実験を行ない, 熱伝導率から  $\eta$  を求めた。気圧は 29.6 bar (N  $\rightarrow$  A  $\rightarrow$  B) と 20.0 bar (N  $\rightarrow$  B) である。Helsinki Group の結果と比較すると (図 2. で ACLV と書いてあるもの)  $\tilde{\eta} = \eta_n / \eta_n(T_c)$  は  $T = T_c$  での粘性係数) の値が大きいことと A  $\rightarrow$  B の飛びが見られない点が異なっている。Manchester Group は He-II の  $\rho_n$  を測定した Andronikashvili の実験を近代化した torsion pendulum を使って  $P = 18.2, 26.0, 29.7$  bar で  $\rho_n, \eta_n$  を測定した。傾向は他の二者と同じである。

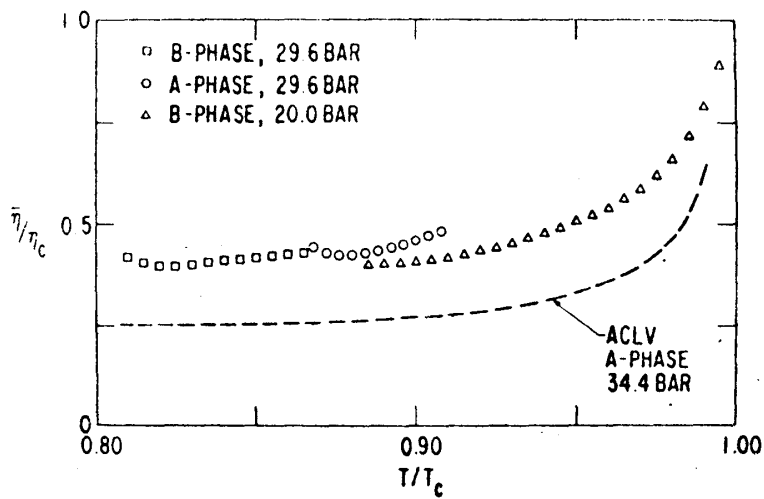


図 2.

$T_c$  の近くの急激な下がり,

$$\tilde{\eta} = 1 - c(1-t)^{1/2}$$

という式によって表現されている。即ち超流動状態になって秩序変数が  $\Delta(T) = 3.06(1-t)^{1/2}/t$  (弱結合) に従って急に成長することによるものと考えられる。(実験についての詳細は上記の文献又は Wheatley の review<sup>5)</sup> を参照)。

## (2) 理 論

今まで色々な試み<sup>6)~11)</sup> があるが, ここでは B 相に対して行った我々の理論<sup>10), 11)</sup> に沿って説明する。二流体モデルの立場で粘性はすべて準粒子によるものとして輸送方

小野義正

程式をたて、それから粘性係数を求める。まず2つの問題点がある。一つは Boltzmann type の輸送方程式を求めることである。正常状態の  $^3\text{He}$  に対するハミルトニアンを Bogoliubov = Valatin 変換して準粒子に対するハミルトニアンを求め、それから Born 近似の範囲で衝突項を計算する。この時超流動状態をあらわす coherence factor を正しく取り入れなくてはならない。次に輸送方程式を解かなくてはならない。秩序変数がベクトルになっていることと coherence factor のため衝突積分はエネルギーと運動量の方に複雑に依存するので、輸送方程式を解くことは面倒になるが、変分法を用いて粘性係数を  $0 \leq t \leq 1$  の全領域で求める。使った試行函数は  $T \rightarrow 0$  では厳密解を与え、他の温度では  $\eta$  の下限をおさえるものである。

まず正常状態の相互作用ポテンシャルを定数 (S 波近似) とした場合の衝突項を書く  
と、

$$I[f_1] = I_A + I_B + I_C$$

$$I_A = \iiint \frac{d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4}{(2\pi)^9} \frac{1}{8} V^2 C_A(1234) \{ (1-f_1)(1-f_2) f_3 f_4 \\ - f_1 f_2 (1-f_3)(1-f_4) \} (2\pi)^4 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4)$$

$$I_{B-a} = \iiint \frac{d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4}{(2\pi)^9} \frac{1}{24} V^2 C_{B-a}(1234) \{ (1-f_1) f_2 f_3 f_4 \\ - f_1 (1-f_2)(1-f_3)(1-f_4) \} (2\pi)^4 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(E_1 - E_2 - E_3 - E_4)$$

$$I_{B-b} = \iiint \frac{d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4}{(2\pi)^9} \frac{1}{8} V^2 C_{B-b}(1234) \{ (1-f_1)(1-f_2)(1-f_3) f_4 \\ - f_1 f_2 f_3 (1-f_4) \} (2\pi)^4 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(E_1 + E_2 + E_3 - E_4)$$

$$C_A(1,2,3,4) = (1+h_{14})(1+h_{23}) + (1+h_{13})(1+h_{24}) + (1-g_{12})(1-g_{34})$$

$$C_{B-a}(1,2,3,4) = (1+h_{14})(1-g_{23}) + (1+h_{13})(1-g_{24}) + (1+h_{12})(1-g_{34})$$

$$C_{B-b}(1,2,3,4) = (1+h_{14})(1-g_{23}) + (1-g_{13})(1+h_{24}) + (1-g_{12})(1+h_{34})$$

ここで  $1+h_{ij}$ , と  $1-g_{ij}$  は coherence factor で

$$1+h_{ij} = 1 + \frac{\epsilon_i \epsilon_j - \Delta_i \cdot \Delta_j}{E_i E_j}, \quad 1-g_{ij} = 1 - \frac{\epsilon_i \epsilon_j + \Delta_i \cdot \Delta_j}{E_i E_j}$$

で与えられる。

次に B 相での粘性係数を求める。そのためドリフト速度を  $\mathbf{u} = (u_x(z), 0, 0)$  にとり、局所平衡からのずれの一次までとる。即ち  $f_k = f_k^0 + \Phi_k \partial f_k^0 / \partial E_k$  として  $\Phi_k$  の一次までの輸送方程式を考える。これを  $X = P\Phi$  と書く。ここで  $X$  はドリフト項で

$$X = -k_x \frac{\partial E_k}{\partial k_z} \frac{\partial f_k^0}{\partial E_k} \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\beta}{m} k_x k_z \frac{\epsilon_k}{E_k} f_k^0 (1-f_k^0) \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

であらわされ、 $P\Phi$  は衝突項で A, B-a と B-b 項の和である。

変分法<sup>12)</sup> によると  $\Phi$  の汎関数  $I[\Phi] = \langle \Phi, P\Phi \rangle / \{ \langle \Phi X \rangle \}^2$  と粘性係数  $\eta_{\text{true}}$  の間には  $I[\Phi] \geq \eta_{\text{true}}^{-1}$  の関係があるので、以下では粘性係数  $\eta$  が近似的に次式で表わされるものとする。

$$\eta = \{ \langle \Phi, X \rangle \}^2 / \langle \Phi, P\Phi \rangle$$

ここで  $\langle \Phi, X \rangle = 2 \int d\mathbf{k} / (2\pi)^3 \Phi(\mathbf{k}) X(\mathbf{k})$  である。試行関数  $\Phi$  は対称性から

$$\Phi = k_x v_z Q(E_k) \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{m} \frac{\epsilon_k}{E_k} k_x k_z \tau \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

の形に書く。ここで  $\tau$  は effective relaxation time である。

角度積分は解析的にすべてできるが、エネルギー積分は  $T \rightarrow 0$  と  $T \rightarrow T_c$  の極限でのみ解析的にできる。（今まで計算されていたのはこの領域のみであった。）以下では全温度領域における数値計算と上述の解析的にした計算の結果を示す。

(i)  $T \lesssim T_c$

$$\tilde{\eta} = 1 - b(1-t)^{1/2}$$

$$\begin{cases} b(\text{analytic}) = 3.458 \\ b(\text{numerical}) = 3.475 \quad (0.9997 \leq t \leq 1.0) \end{cases}$$

即ち  $\delta$ -linear の議論は  $T_c$  に非常に近い狭い温度領域でのみ成立する。 $t \sim 0.998$  程度になると  $\delta^2$  項や  $\delta^2 \ln \delta$  項がきいて来ることが示され  $\tilde{\eta}$  は単純に  $\delta$  で展開できない。そこで実験と比較するには  $\delta$  の大きいところで数値計算して  $\eta$  を求めなくてはならない。

(ii)  $0.8 \leq t \leq 1.0$  の結果を図 3 に示す。点線は Johson et al.<sup>3</sup>, の実験値である。(P=20 atm) 理論と実験の一致はよい。点線をあらわす実験式  $\tilde{\eta}_w$  は<sup>5)</sup>

$$\tilde{\eta}_w = 1 - 2.9 \left[ (1-t)^{1/2}/t \right] + 3.5 \left[ (1-t)^{1/2}/t \right]^2$$

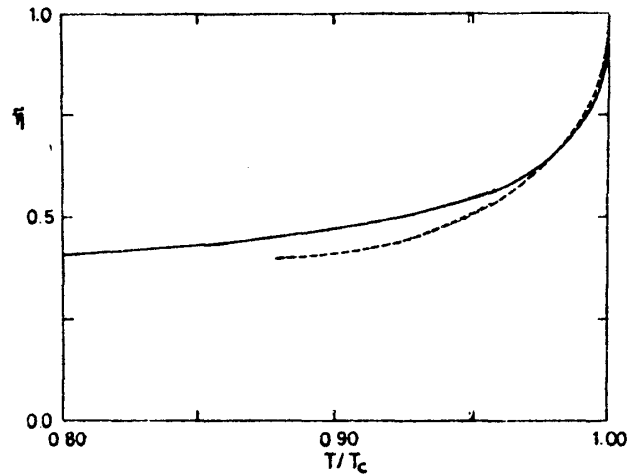


図 3.

であり、我々の求めた理論曲線は同様な式で表わすと、

$$\tilde{\eta} = 1 - 2.9 \left[ (1-t)^{1/2}/t \right] + 3.75 \left[ (1-t)^{1/2}/t \right]^2$$

となる。しかし注意すべきことは、これは  $\delta$  で展開していることを示す式ではないということである。

(iii)  $0 \leq t \leq 0.2$  では解析的に  $\tilde{\eta}$  は次式でよく記述される。(弱結合  $\Delta(0) = \pi k_B T_c / r$  を用いて)

$$\tilde{\eta} = \frac{4\pi}{7} \left( \frac{k_B T_c}{\Delta(0)} \right)^2 \left( 1 - \frac{173}{98} \frac{k_B T}{\Delta(0)} \right) = 0.577 (1 - 1.0008 t)$$

数値計算の結果も上式に乗る。

(iv) 最後に全温度領域の振舞いを図 4 に示す。overall な振舞いは図 1 の Helsinki group のものと一致している。

以上簡単なモデルで B 相での粘性係数を求め実験と比較した。正常状態の  $^3\text{He}$  は、Landau のフェルミ流体であり Landau parameters  $F_0^S, F_0^A = z_0/4, F_1^S$  等を使って記

述されている。これらを用いて数値的にもっとキチンとした計算 (s-p 波近似) を現在行っているが、ここでは正常状態の粘性係数の計算結果を実験<sup>5)</sup> 及び他の理論<sup>8)</sup> と比較した結果を図5に示す。実線が実験値、点線が変分法による我々の計算値、一点鎖線が Pethick et al<sup>8)</sup> による正常状態の厳密解である。実験と理論はあまりよい一致を示さぬが、理論的には我々の試行函数は充分よいものであることを示している。

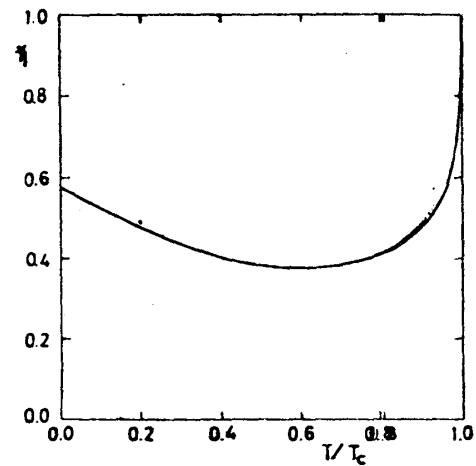


図 4.

以下残されている問題は粘性係数では上記

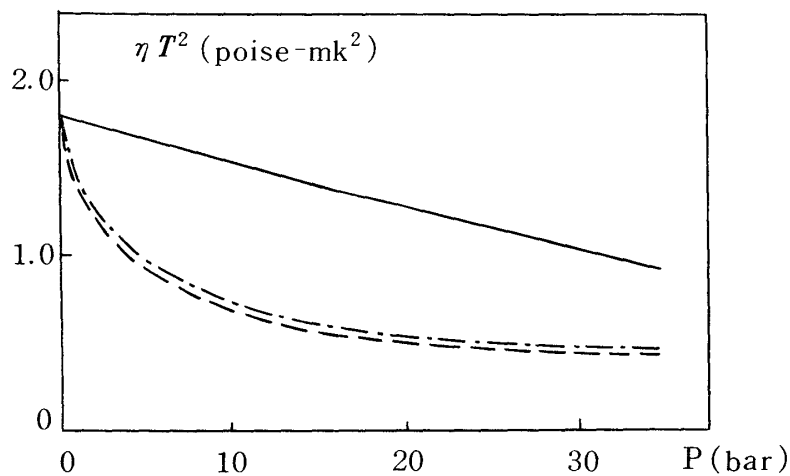


図 5

の s-p 波近似の計算を超流動状態に拡張すること、A 相に対する粘性係数を求めること。他の輸送係数については拡散熱伝導率を上にも求めた輸送方程式から求めること (別な試行函数を使つての計算が現在進行中です)。スピン拡散係数については衝突項の形が異なるため改めて輸送方程式を求めることなどである。最後に拡散熱伝導率の測定が Shields と Goodkind<sup>13)</sup> によって行なわれた事をつけ加えます。

参 考 文 献

- 1) T. A. Alvesalo, H. K. Collan, M. T. Lojonen and M. C. Veuro, Phys. Rev. Lett. **32**, 981 (1974).
- 2) T. A. Alvesalo, H. K. Collan, M. T. Lojonen, O. V. Lounasmaa and M. C. Veuro, J. Low Temp. Phys. **19**, 1 (1975).
- 3) R. T. Johnson, R. L. Kleinberg, R. A. Webb and J. C. Wheatley, J. Low Temp. Phys. **18**, 501 (1975).
- 4) P. C. Main, C. W. Kiewiet, W. T. Band, J. R. Hook, D. J. Sandiford and H. E. Hall, J. Phys. **C9**, L397 (1976).
- 5) J. C. Wheatley, Rev. Mod. Phys. **47**, 415 (1975).
- 6) J. Seiden, Comptes rendus Acad. Sci. Ser B **276**, 905 (1973) ; **277**, 115 (1973).
- 7) T. Soda and K. Fujiki, Progr. Theor. Phys. **52**, 1405 (1974) ; **53**, 1218 (1974) (Errata).
- 8) C. J. Pethick, H. Smith and P. Bhattacharyya, Phys. Rev. Lett. **34**, 643 (1975) ; J. Low Temp. Phys. **23**, 225 (1976) ; two preprints (Oct. 1976).
- 9) B. T. Geilikman and V. R. Chechetkiu, Soviet Phys. -JETP **42**, 148 (1976).
- 10) Y. A. Ono, J. Hara, K. Nagai and K. Kawamura, J. Low Temp. Phys. **27**, Nos. 3/4 (1977).
- 11) Y. A. Ono, Ph. D. Thesis, University of Tokyo (1976).
- 12) J. M. Ziman, *Electrons and Phonons* (Clarendon Press, Oxford, 1960) Chap. 7, p. 275.
- 13) S. E. Shields and J. M. Goodkind, preprint (1976).

液体  $\text{He}^3$  の超流動性

恒 藤 敏 彦

超流動  $\text{He}^3$  の特色は、それが結晶や液晶のように texture をもつことである。一般に超流動  $\text{He}^3$  の秩序パラメーターは、9つの成分をもつ波動関数  $d_{\alpha i}$  である。添字  $\alpha, i$  はそれぞれ  $^3\text{P}$  の軌道とスピン状態を表わす。 $d_{\alpha i}$  は軌道およびスピン空間の回転に対してベクトルの変換をする。Texture とはもっとも一般的にはこの  $d_{\alpha i}$  の場であるが、